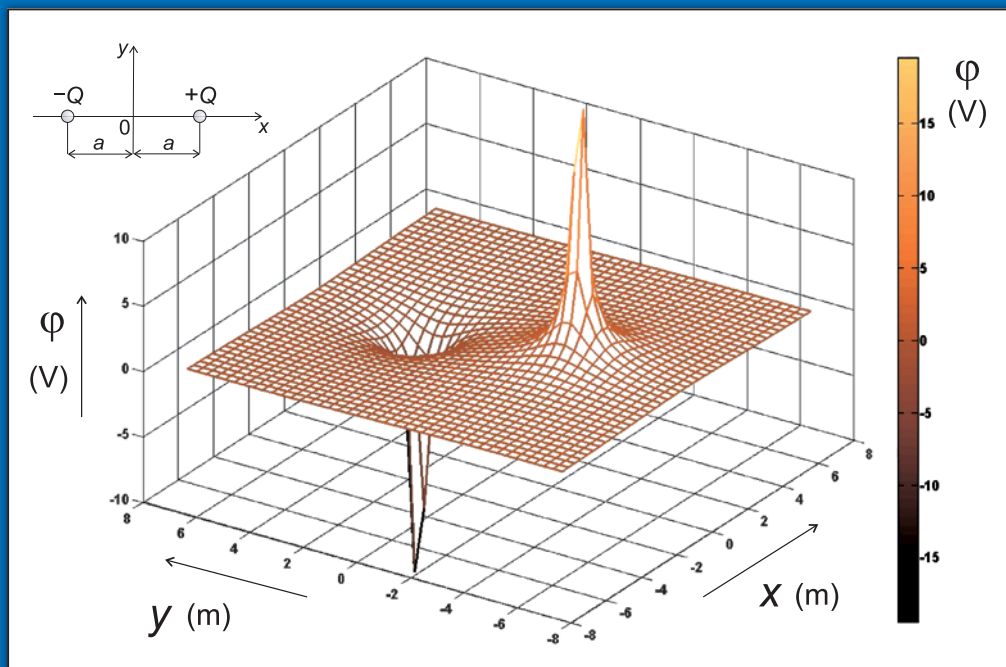


Daniel Mayer

APLIKOVANÝ ELEKTROMAGNETIZMUS



Aplikovaný elektromagnetismus

*Úvod do makroskopické teorie elektromagnetického pole
pro elektrotechnické inženýry*

Daniel Mayer

 nakladatelství
České Budějovice, 2026

Aplikovaný elektromagnetismus

© Prof. Ing. Daniel Mayer, DrSc., 2012–2026

Recenzent: Prof. Ing. Klára Čápová, CSc.

První vydání knižní verze 2012

První vydání elektronické verze 2026

Vydalo nakladatelství KOPP,

Šumavská 3, 370 01 České Budějovice,

tel.: 386 460 474, 773 780 628

e-mail: knihy@kopp.cz;

Internet: www.kopp.cz

ISBN 978-80-7232-436-1 (print)

ISBN 978-80-7232-658-7 (pdf)

Všechna práva vyhrazena.

Žádná část této knihy nesmí být reprodukována, skladována ve vyhledávacím systému nebo předávána v jakékoli formě nebo jakýmkoli prostředkem elektronickým, mechanickým, fotokopírováním, nahráváním nebo jinak bez předchozího svolení vydavatele.

Nasledující text vznikl za přispění editora, grafika, sazeče, korektora a mnoha dalších. Všichni vám společně s autorem děkujeme za zakoupení této knihy.

Pokud jste se k textu dostali bez zaplacení a kniha se vám líbila, podpořte prosím vznik publikace zakoupením jedné kopie na **www.kopp.cz**

Obsah

PŘEDMLUVA.....	11
ÚVOD.....	13
0.1. Jak teoreticky řešíme elektrotechnické projekty.....	13
0.2. Dvojitý význam pojmu „pole“.....	16
0.3. Elektromagnetické pole a technické projekty.....	20
1. Základní pojmy a zákony teorie elektromagnetického pole	23
1.1. Vznik a vývoj teorie elektromagnetického pole	23
1.2. Základní pojmy a problémy teorie elektromagnetického pole.....	25
1.3. Význam teorie elektromagnetického pole pro provádění inženýrských projektů	25
1.4. Veličiny elektromagnetického pole a jejich jednotky	25
1.5. Materiálové charakteristiky	30
1.6. Maxwellovy rovnice.....	32
1.6.1. Soustava Maxwellových rovnic v integrálním tvaru	32
1.6.2. Soustava Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru	36
1.6.3. Rovnice pro proudovou hustotu	38
1.6.4. Podmínky na rozhraní.....	39
1.7. Klasifikace elektromagnetického pole.....	44
1.8. Příklady	46
2. Základní vlastnosti časově neproměnného elektrického a magnetického pole	49
2.1. Elektrostatické pole	49
2.1.1. Rovnice elektrostatického pole	49
2.1.2. Vodič v elektrostatickém poli, elektrostatická indukce	55
2.1.3. Dielektrikum v elektrickém poli, polarizace dielektrika	58
2.1.4. Matematický popis elektrické polarizace, vektor elektrické polarizace.....	60
2.2. Stacionární proudové pole.....	63
2.2.1. Rovnice stacionárního proudového pole	64
2.2.2. Zákony elektrických obvodů	70
2.3. Stacionární magnetické pole	74
2.3.1. Rovnice magnetického pole.....	74
2.3.2. Definice a vlastnosti skalárního magnetického potenciálu.....	76
2.3.3. Definice a vlastnosti vektorového magnetického potenciálu	78
2.4. Makroskopické vlastnosti magnetik	82
2.5. Magnetická polarizace.....	90
2.5.1. Mikrostruktura procesu magnetické polarizace.....	90
2.5.2. Matematický popis magnetizace, vektor magnetické polarizace	92
2.6. Závěrečná poznámka.....	95
2.7. Příklady	96

3. Přímá aplikace Maxwellových rovnic v integrálním tvaru	99
3.1. Přímé řešení Maxwellových rovnic v integrálním tvaru	99
3.1.1. Elektrostatické pole	100
3.1.2. Stacionární proudové pole	107
3.1.3. Stacionární magnetické pole	108
3.2. Řešení složitějších konfigurací s použitím principu superpozice	111
3.3. Příklady	116
4. Okrajové úlohy pro rovnice potenciálů stacionárních elektrických a magnetických polí	123
4.1. Obecná formulace okrajové úlohy pro elektrostatiiku	124
4.2. Dva příklady na řešení jednoduchých okrajových úloh z elektrostatiky.....	127
4.3. Okrajová úloha pro stacionární proudové pole	129
4.4. Okrajová úloha pro stacionární magnetické pole.....	131
4.5. Sestavení matematického modelu	134
4.5.1. Dva příklady	134
4.5.2. Vymezení definiční oblasti v symetrických a v periodických topologických strukturách	135
4.6. Shrnutí	139
4.7. Příklady.....	139
5. Řešení stacionárních elektrických a magnetických polí pomocí integrálních výrazů	147
5.1. Elektrostatické pole	147
5.1.1. Prostorové elektrostatické pole	147
5.1.2. Rovinné elektrostatické pole.....	149
5.2. Stacionární magnetické pole. Zákon Biotův-Savartův.....	153
5.3. Metoda zrcadlení	159
5.3.1. Elektrostatické pole	159
5.3.2. Stacionární proudové pole.....	166
5.3.3. Stacionární magnetické pole	167
5.4. Příklady	168
6. Numerické řešení okrajových úloh	179
6.1. Metoda konečných diferencí – MKD	179
6.1.1. Algoritmus MKD	179
6.1.2. Sestavení diskrétního modelu okrajové úlohy.....	181
6.2. Metoda konečných prvků – MKP	187
6.3. Řešení elektromagnetických polí moderními softwarovými produkty	194
6.3.1. Struktura současného profesionálního SW	194
6.3.2. Současný profesionální SW	195
6.3.3. Ukázky použití profesionálního programu.....	197
6.4. Příklady	203

7. Výpočet kapacit, indukčností a odporů.....	205
7.1. Výpočet kapacit.....	205
7.1.1. Definice kapacity kondenzátoru.....	205
7.1.2. Výpočet kapacity kondenzátoru pomocí Gaussovy věty (třetí MR).....	207
7.1.3. Výpočet kapacity kondenzátoru řešením okrajové úlohy	211
7.2. Výpočet vlastní a vzájemné indukčnosti.....	214
7.2.1. Dvě definice vlastní indukčnosti	214
7.2.2. Definice vzájemné indukčnosti.....	219
7.2.3. Výpočet vlastní a vzájemné indukčnosti tenkých smyček	221
7.2.4. Neumannův vzorec pro výpočet vzájemné indukčnosti.....	227
7.3. Výpočet odporů	230
7.4. Kondenzátory s větším počtem elektrod	232
7.5. Příklady	236
8. Magnetické obvody	245
8.1. Zákony magnetických obvodů	246
8.1.1. Hopkinsonův zákon	247
8.1.2. První Kirchhoffův zákon pro magnetické obvody.....	248
8.1.3. Druhý Kirchhoffův zákon pro magnetické obvody	249
8.2. Analogie mezi elektrickými a magnetickými obvody.....	250
8.3. Metody řešení magnetických obvodů buzených proudem	251
8.3.1. Jednoduchý (nerozvětvený) magnetický obvod	251
8.3.2. Složitý magnetický obvod.....	259
8.4. Indukčnost cívek magnetických obvodů	260
8.5. Magnetické obvody s permanentními magnety	261
8.5.1. Jednoduchý magnetický obvod s hysterézí.....	262
8.5.2. Magnetické obvody s permanentními magnety generujícími silná magnetická pole	265
8.6. Materiály magnetických obvodů	270
8.7. Příklady	274
9. Energie a síly v elektrickém a magnetickém poli	281
9.1. Energie a výkon ve stacionárním proudovém poli.....	281
9.2. Energie elektrostatického pole.....	284
9.2.1. Určení elektrostatické energie soustavy tvořené n náboji	284
9.2.2. Určení elektrostatické energie pomocí vektorů $\mathbf{E}$ a $\mathbf{D}$	285
9.3. Princip minima elektrostatické energie	287
9.4. Síly v elektrostatickém poli	289
9.4.1. Síla působící na náboj v elektrickém poli	289
9.4.2. Výpočet síly z energie elektrického pole.....	290
9.5. Energie stacionárního magnetického pole.....	292
9.5.1. Určení energie stacionárního magnetického pole pomocí vektorů $\mathbf{H}$ a $\mathbf{B}$	292
9.5.2. Určení energie stacionárního magnetického pole pomocí vektorového potenciálu $\mathbf{A}$	293
9.6. Energetická vlastní a vzájemná indukčnost	297

9.6.1. Definice energetické vlastní indukčnosti.....	297
9.6.2. Definice energetické vzájemné indukčnosti.....	303
9.7. Energie magnetického pole ve feromagnetiku.....	308
9.8. Síly v magnetickém poli	312
9.8.1. Lorentzova síla působící na proudovodiče v magnetickém poli.....	312
9.8.2. Zobecněná Lorentzova síla	318
9.8.3. Výpočet síly pomocí energie magnetického pole	321
9.8.4. Výpočet sil pomocí Maxwellova magnetického tenzoru pnutí	324
9.8.5. Souvislost mezi zobecněnou Lorentzovou silou a rovnicemi plynoucími z Maxwellova magnetického tenzoru pnutí.....	329
9.8.6. Síly působící na rovnoběžné vodiče vícefázové soustavy	329
9.9. Příklady.....	334
10. Matematická analogie mezi základními zákony elektrického a magnetického pole.....	347
10.1. Matematická analogie stacionárních polí.....	347
10.2. Příklady	351
11. Časově proměnné elektromagnetické pole	355
11.1. Základní vlastnosti časově proměnného (nestacionárního) elektromagnetického pole	355
11.1.1. První Maxwellova rovnice.....	356
11.1.2. Druhá Maxwellova rovnice	357
11.1.3. Třetí a čtvrtá Maxwellova rovnice.....	362
11.1.4. Rovnice kontinuity elektrického proudu	362
11.2. Kvazistacionární elektromagnetické pole	362
11.3. Harmonické elektromagnetické pole.....	363
11.3.1. Komplexní reprezentace skalární harmonicky proměnné veličiny $v(t)$..	364
11.3.2. Komplexní reprezentace vektorové harmonické veličiny $V(t)$	365
11.3.3. Maxwellovy rovnice v komplexním vyjádření	366
11.4. Zákon zachování energie	368
11.4.1. Poyntingův vektor.....	368
11.4.2. Přenos elektromagnetické energie – dvojí koncepce.....	370
11.5. Elektrodynamické potenciály.....	372
11.6. Příklady	374
12. Elektromagnetické pole v pohybujícím se prostředí	381
12.1. Zákon elektromagnetické indukce v pohybujícím se prostředí.....	381
12.1.1. Integrální tvary indukčního zákona	381
12.1.2. Diferenciální tvary indukčního zákona.....	384
12.2. Pohybující se magnetické pole.....	390
12.2.1. Točivé magnetické pole.....	390
12.2.2. Postupné magnetické pole.....	397
12.2.3. Poznámka k „pohybu magnetického pole“	398
12.3. Vířivé proudy	398
12.3.1. Fyzikální podstata vířivých proudů	398

12.3.2. Experimenty s vířivými proudy	399
12.3.3. Jak se uplatňují vířivé proudy v praxi	401
12.4. Povrchový jev	404
12.4.1. Kvalitativní popis a fyzikální podstata povrchového jevu	404
12.4.2. Matematický model EPJ a jeho analytické řešení	413
12.4.3. Matematický model MPJ a jeho analytické řešení	420
12.5. Příklady	423
13. Numerické řešení kvazistacionárních problémů	427
13.1. Matematický model EPJ ve vodiči s časově harmonickým proudem	427
13.1.1. Spojitý matematický model pro EPJ ve vodiči libovolného průřezu	428
13.1.2. Postup při řešení matematického modelu pro EPJ	432
13.2. Matematický model EPJ ve vodiči s proudem časově obecného průběhu	438
13.2.1. Spojitý matematický model pro EPJ	439
13.2.2. Diskrétní matematický model pro EPJ	441
13.3. Elektrický vektorový potenciál	446
13.4. Elektromagnetické stínění	450
13.4.1. Elektrické stínění	450
13.4.2. Magnetické stínění	451
13.5. Řešení magnetického pole v nelineárním prostředí	455
13.6. Příklady	456
14. Elektromagnetické vlny	465
14.1. Vlnové rovnice elektromagnetického pole a jejich řešení	465
14.1.1. Formulace vlnových rovnic	465
14.1.2. Rovinná elektromagnetická vlna v dielektriku, obecně proměnná s časem	466
14.1.3. Harmonická REM vlna v dielektriku	470
14.1.4. Harmonická REM vlna ve vodivém prostředí	472
14.1.5. Polarizace elektromagnetických vln. Disperze vln	474
14.2. Přenos energie rovinnou vlnou v dielektriku	476
14.3. Dopad rovinné vlny na rozhraní dvou prostředí	477
14.3.1. Kolmý dopad REM vlny na rozhraní	477
14.3.2. Šikmý dopad REM vlny na rozhraní	480
14.4. Elektrodynamické potenciály nestacionárního elektromagnetického pole. ..	481
14.5. Hertzovy vektory	483
14.6. Generování elektromagnetických vln	485
14.6.1. Elektromagnetické pole oscilujícího elektrického dipólu	486
14.6.2. Výkon vyzařovaný dipólem, vyzařovací odpor	490
14.6.3. Elektromagnetické pole oscilujícího magnetického dipólu	491
14.7. Příklady	492
15. Elektromagnetické pole v anizotropním prostředí	495
15.1. Anizotropie a její matematické vyjádření	495
15.1.1. Pojem anizotropie	495
15.1.2. Matematický popis anizotropie	496

15.2. Materiálové rovnice pro anizotropní prostředí	498
15.3. Rovnice stacionárního elektrického a magnetického pole v anizotropním prostředí	500
16. Dodatky	505
16.1. Existence a jednoznačnost řešení rovnic elektromagnetického pole	505
16.2. Přehled základních operací vektorového počtu	507
16.2.1. Vektorová algebra	507
16.2.2. Vektorová analýza	509
16.2.3. Některé důležité vzorce z vektorové analýzy	512
16.2.4. Některé integrální věty vektorové analýzy	512
16.2.5. Různé druhy vektorových polí	513
16.3. Veličiny teorie elektromagnetického pole a jejich jednotky	514
16.4. Základní operace vektorové analýzy v různých souřadných systémech	516
16.5. Tvůrci teorie elektromagnetického pole	518
16.6. Čeští a slovenští elektrotechnici, kteří přispěli k rozvoji teorie elektromagnetického pole	523
Literatura	527
Rejstřík	533

Věda je víc než soubor znalostí. Je to způsob myšlení.
Carl Sagan, americký astronom

PŘEDMLUVA

Makroskopická teorie elektromagnetického pole je teoretickým základem pro řadu elektrotechnických disciplín. Její základy vybudovali Michael Faraday a James Clerk Maxwell v 19. století. Rozvoj vědy a techniky v posledním čtvrt století, díky rozvoji počítačů, posunul teorii elektromagnetického pole k novému, vyššímu stupni vědeckého poznání a technického využití. Tento vývojový proces vedl k formulaci metod, jimiž lze zvládnout i velmi náročné problémy z oblasti silnoproudé i sdělovací elektrotechniky, které nemají v minulosti obdoby.

Elektrotechnický inženýr řešící vývojové problémy by měl být vyzbrojen nejen podrobnými znalostmi se své specializace, ale i dobrými znalostmi teorie elektromagnetického pole, neboť z ní je nutno vycházet při projektování nových zařízení, které svou funkcí a případně svými parametry se výrazně liší od dosavadních. Projektant by se při tom neměl omezovat jen na matematické vztahy a měl by proniknout do „filozofie“ teorie elektromagnetického pole, neboť, jak upozornil již Ludwig Boltzmann, Maxwell ve své teorii předložil fyzikální názor a jeho teorie není jen pouhým *systémem Maxwellových rovnic*, ale i *Faradayovým světem představ*.

Tato publikace vznikla z autorových přednášek teorie elektromagnetického pole, které měl po řadu let na elektrotechnické fakultě Západočeské univerzity v Plzni. Je určena studentům bakalářského a inženýrského programu; má je vést nejen k hlubšímu pochopení základů Faraday-Maxwellovy teorie, ale i k ovládnutí způsobů, jimiž lze na základě této teorie řešit jednodušší problémy inženýrské praxe. Kniha je koncipována tak, aby nejenom předávala čtenářům poznatky, ale aby stimulovala tvůrčí způsoby studia. Pro větší názornost jsou teoretické partie doplněny řadou příkladů.

Autor vyjadřuje svůj srdečný dík paní profesorce Ing. Kláře Čákové, CSc. za recenzi rukopisu knihy. Na numerickém řešení některých příkladů se účinně podíleli moji kolegové, pánové Ing. Petr Kropík, PhD., Ing. Jan Mayer, Ing. Petr Polcar a doc. Ing. Bohuš Ulrych, CSc, soupis komerčních SW poskytl pan doc. Ing. Pavel Karban, PhD. Všem jmenovaným patří autorův dík.

Prof. Daniel Mayer
Plzeň, březen 2011.

„... při pohledu na magnet je prostředí kolem něho právě tak podstatné, jako magnet sám, neboť je součástí skutečného a magnetického systému.“

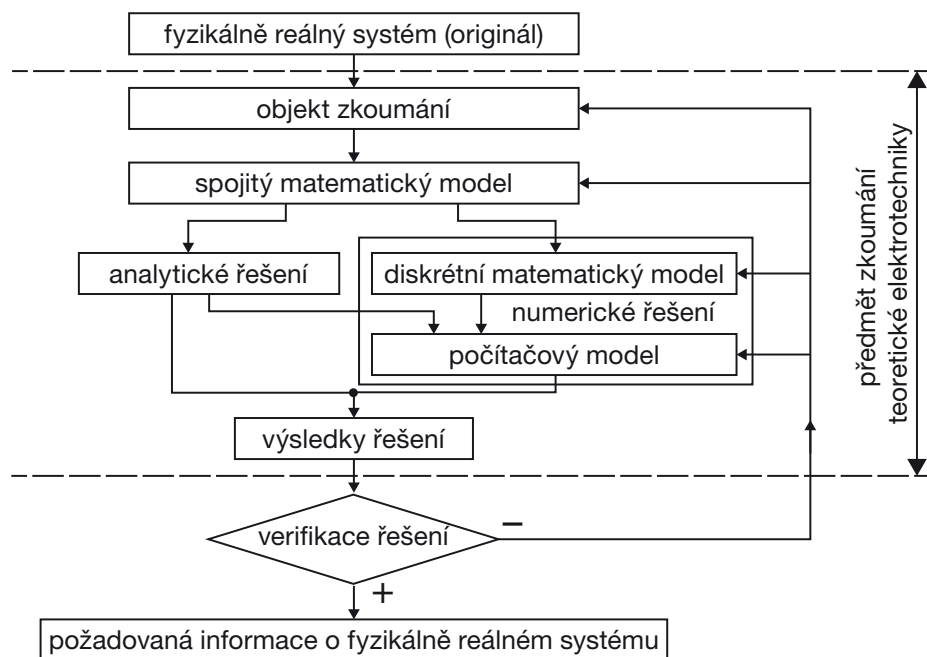
M. Faraday,
Experimental Research in Electricity, r. 1839–1855

ÚVOD

0.1. Jak teoreticky řešíme elektrotechnické projekty

Při *teoretickém* vyšetřování vlastností nějakého elektrotechnického zařízení nikdy neprovádíme řešení na tomto skutečném zařízení – nazveme ho *fyzikálně reálným systémem*, čili *originálem*. Zabýváme se jeho více či méně zjednodušeným (idealizovaným) *modelem*, který je pro nás *objektem zkoumání*.

Postup našeho vyšetřování je znázorněn na obr. 0.1. Při sestavení modelu postupujeme tak, že abstrahujeme od jeho vlastností, které jsou pro zkoumaný jev nepodstatné a omezíme se na jeho vlastnosti, o kterých se domníváme, že zkoumaný jev ovlivňují a že je nelze zanedbat. Vyšetřované zařízení (tj. fyzikálně reálný systém) tím nahradíme (imitujeme) jeho více či méně jednodušším modelem (tj. objektem našeho zkoumání). Poté pomocí zákonů teorie elektromagnetického pole matematicky popíšeme sledované jevy v tomto modelu. Dostaneme tak *spojitý matematický model* a na jeho základě hledáme řešení.



Obr. 0.1. Postup při teoretickém řešení technických problémů.

K danému originálu lze obvykle přiřadit různé objekty zkoumání (modely) a tedy i různé matematické modely, lišící se svojí adekvátností (tedy i přesností) a ovšem i svojí složitostí. V jednodušších případech se často podaří nalézt *analytické řešení* spojitého matematického modelu. V současné době se ve stále větší míře uplatňuje jeho přibližné (aproximativní) *numerické řešení*. Od spojitého matematického modelu pak přecházíme k *diskrétnímu matematickému modelu*, který realizujeme na počítači. Na základě algoritmu řešení diskrétního modelu vytvoříme *výpočtový program*, který vložíme do počítače, čímž vytvoříme *počítačový model*. Tímto počítačovým modelem napodobujeme (simulujeme) řešený fyzikálně reálný systém a zkoumáme jeho vlastnosti a jevy, které nás zajímají. Tento postup nazýváme *počítačovou simulací*.

Jiný způsob řešení elektrotechnických problémů spočívá v přímém *experimentálním zkoumání* fyzikálně reálného systému, anebo jeho zmenšené (resp. zvětšené) kopii. To však bývá často velmi nákladné, technicky obtížné a mnohdy i nemožné. Naproti tomu s počítačovým modelem můžeme provádět různé simulační experimenty, které jsou operativní a nenákladné.

Speciálním objektem zkoumání je model, který nazýváme *elektrickým obvodem*. Při sestavování jeho matematického modelu zpravidla vycházíme z Kirchhoffových zákonů, které, jak ukážeme později, vyplývají ze základních zákonů teorie elektromagnetického pole. Podle objektu zkoumání tedy rozlišujeme *polní koncepci* a *obvodářskou koncepci* řešení elektrotechnických problémů.

Nesprávný, anebo nedostatečně přesný výsledek je důsledkem omylu v některé fázi řešení. Může se jednak např. o příliš silné zjednodušení originálu při konstrukci jeho modelu (objektu našeho zkoumání), nebo o chyby při formulaci a následném řešení spojitého matematického modelu. Při numerickém řešení může být zdrojem chyb příliš hrubá diskretizace spojitého matematického modelu, nebo chyba ve výpočtovém algoritmu, anebo programátorská chyba v počítačovém modelu. Aby bylo řešení spolehlivé, je nutná *verifikace* (ověření) *výsledků*, které jsme získali výpočtem. Verifikace se provádí tak, že výsledky výpočtu porovnáváme s jakýmkoliv srovnatelnými hodnověrnými údaji, například s výsledky měření na modelech nebo na obdobných realizovaných zařízeních, nebo porovnáním s dosavadními zkušenostmi, anebo třeba jen s „fyzikálním názorem“ na řešený problém. Jestliže vzniknou nesrovnalosti, je třeba identifikovat zdroje chyb a po jejich nalezení a opravení proces řešení opakovat.

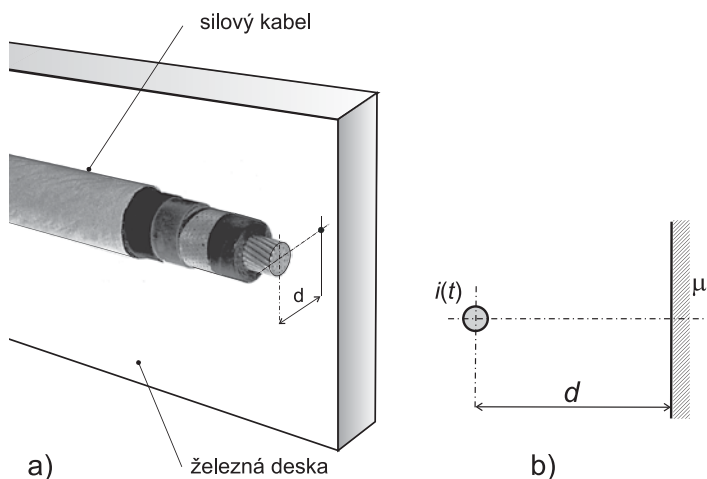
Fyzikálně reálné systémy nahrazujeme jen takovými modely (objekty zkoumání), které nejsou v rozporu s fyzikálními zákony (říkáme, že jsou *korektní*), mají jediné řešení (*existence* a *unicita* řešení), a přitom jsou dostatečně přesné (jsou *adekvátní*). Vyšší přesnost objektu zkoumání lze obvykle docílit za cenu jeho větší složitosti a tím i větší komplikovanosti spojitého matematického modelu. Praktickou cenu mají jen takové korektní modely, které jsou na jedné straně dostatečně adekvátní a na druhé straně jsou zvládnutelné s našimi matematickými znalostmi, resp. s výpočtovou technikou, kterou máme k dispozici. Pro úspěšné sestavování objektu zkoumání a posléze pro sestavení jeho matematického modelu je třeba dobře znát zákony elektromagnetického pole; uplatňuje se též zkušenost a intuice řešitele, čili „inženýrské umění“.

Porovnejme *analytické* a *numerické řešení* matematického modelu. Analytické řešení klade často vysoké nároky na matematickou erudici řešitele a lze jej realizovat jen pro

jednodušší objekty zkoumání. Jeho velkou výhodou je obecný charakter nalezeného řešení, které umožňuje hlubší pohled na zákonitosti sledovaných jevů, má tedy značnou cenu *predikční*. Naproti tomu numerické řešení umožňuje pracovat s objektem zkoumání, který může mít složitější strukturu než při řešení analytickém, může zahrnovat více podrobností, může mít mnohem větší rozlišovací úroveň a tedy více se přiblížit fyzikálně reálnému systému, může být více adekvátní. Další výhodou numerického řešení je, že povaha práce při počítačovém modelování je rutinní a platnost použitých postupů je ve značné míře *univerzální*. Nevýhodou numerického řešení je, že dosažené výsledky platí jen pro zcela konkrétní případ a naplatí obecně, což snižuje jejich prognostickou hodnotu.

Příklad 0.1.

Máme určit sílu, která působí na jednožilový kabel. Kabel je tvořen měděným elektrovodným lanem, má několikavrstvovou izolaci, je protékán proudem $i(t)$ a je uložen v blízkosti ocelové konstrukce, obr. 0.2a. Tomuto *fyzikálně reálnému systému* lze přiřadit různé modely, lišící se svou adekvátností. Jednoduchý model získáme například tím, že lano nahradíme tenkým vodičem a ocelovou konstrukci nahradíme deskou o nekonečné permeabilitě μ , obr. 0.2b. Pro tento objekt zkoumání pak sestavíme matematický model. V kapitole 9.8.1 ukážeme, že tento jednoduchý model lze snadno vyřešit analyticky. Kdybychom chtěli získat přesnější řešení, navrhneme objekt zkoumání, který bude složitější, avšak bude bližší fyzikálně reálnému systému. Například budeme respektovat skutečný průřez lana, skutečný tvar ocelové konstrukce a hodnotu její permeability. Matematický model bude složitější, jeho řešení bude obtížnější, avšak dosažené výsledky budou přesnější.



Obr. 0.2. Kabel uložený v blízkosti ocelové konstrukce:
a) fyzikálně reálný systém, b) jeden z možných modelů (objektů zkoumání).

Přechodu od fyzikálně reálného systému k jeho modelu se věnují různé elektrotechnické disciplíny, např. stavba elektrických strojů, elektrotepelná technika, elektroenergetika apod. V této knize se tím nebudeme zabývat. Budeme vycházet z daných objektů zkoumání, budeme pro ně sestavovat matematické modely a formulovat metody jejich řešení. Metodami verifikace výsledků se zde též nebudeme zabývat a ponecháme je zmíněným disciplinám.

0.2. Dvojí význam pojmu „pole“

Ve fyzice pracujeme buďto se *skaláry* (příkladem skaláru je teplota, práce, elektrický proud apod.), anebo s *vektory* (například síla, rychlost, zrychlení apod.). Některé fyzikální veličiny mohou mít i jiný, složitější matematický charakter (například *tenzory*). Je třeba rozlišovat mezi matematickým a fyzikálním pojmem pole.

Matematický význam pojmu pole

Skalární pole. Nechť je v prostorové (rovinné) oblasti Ω definována skalární funkce φ , která každému bodu B této oblasti přiřazuje právě jednu hodnotu reálného čísla $\varphi(B)$. Pak říkáme, že v oblasti Ω je definováno *skalární pole* φ . Je-li oblast Ω rovinná, je *skalární pole rovinné* $\varphi(x,y)$, je-li oblast Ω prostorová, je *skalární pole prostorové* $\varphi(x,y,z)$. Příkladem prostorového skalárního pole je rozložení atmosférického tlaku v prostoru, v němž žijeme.

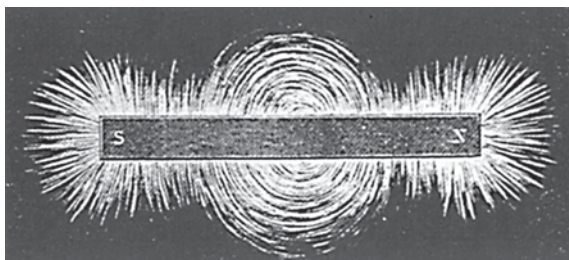
Vektorové pole. Nechť je v prostorové (rovinné) oblasti Ω definována vektorová funkce F , která každému bodu B oblasti Ω přiřazuje právě jednu hodnotu vektoru $F(B)$. Pak říkáme, že v oblasti Ω je definováno *vektorové pole* F , které může být rovinné $F(x,y)$ a nebo prostorové $F(x,y,z)$. Příkladem rovinného vektorového pole je silové pole: v oblasti mezi elektricky nabitým dlouhým vodičem uloženým nad zemí působí na elektricky nabitě tělísko síla.

Fyzikální význam pojmu pole

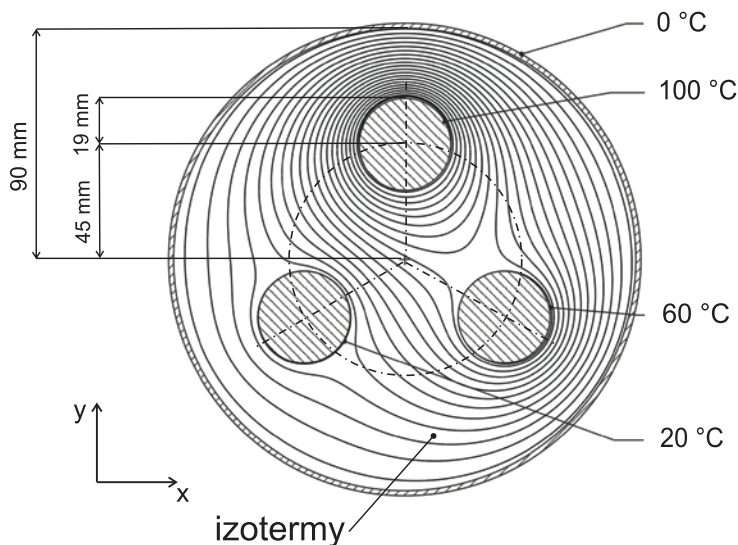
V elektromagnetismu pracujeme s *elektromagnetickým polem* a s jeho speciálními případy, například s elektrostatickým polem, stacionárním magnetickým polem apod. Toto pole není jen matematickou abstrakcí, je *objektivní fyzikální realitou*, jejímiž vlastnostmi se budeme podrobně zabývat. Budeme zkoumat fyzikálně-matematické vlastnosti elektromagnetického pole a využijeme k tomu matematické pole, spolu s příslušným matematickým aparátem (zejména vektorovou analýzou). Tedy: *fyzikální pole budeme popisovat (modelovat) pomocí matematického pole*.

Vizualizace (zobrazení) fyzikálních polí

Michael Faraday, inspirovan „pilinovými obrazy“ magnetického pole permanentních magnetů (obr. 0.3), zavedl pojmy *siločára* a *ekvipotenciální plocha*, resp. *ekvipotenciální křivka*. V oblasti kmitočtů, s nimiž pracujeme v elektrotechnických aplikacích, nelze elektromagnetické pole přímo vnímat lidskými smysly. Faraday zobrazil elektromagnetické pole pomocí siločar a ekvipotenciál a tím vytvořil jeho *geometrický model*, který je pro



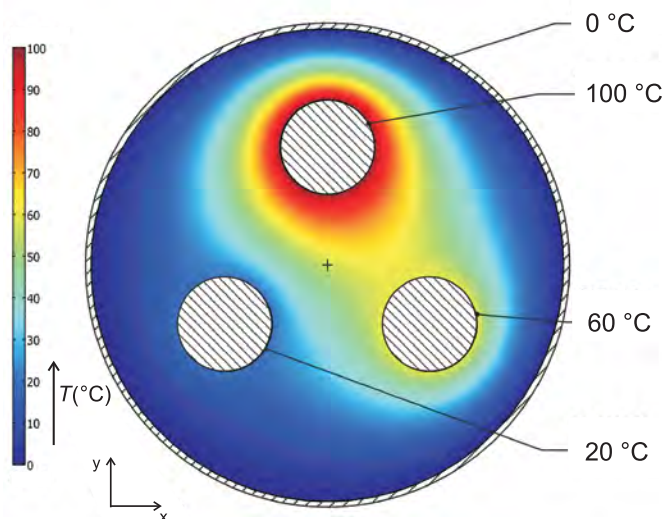
Obr. 0.3. Zobrazení magnetického pole tyčového magnetu pomocí železných pilin.



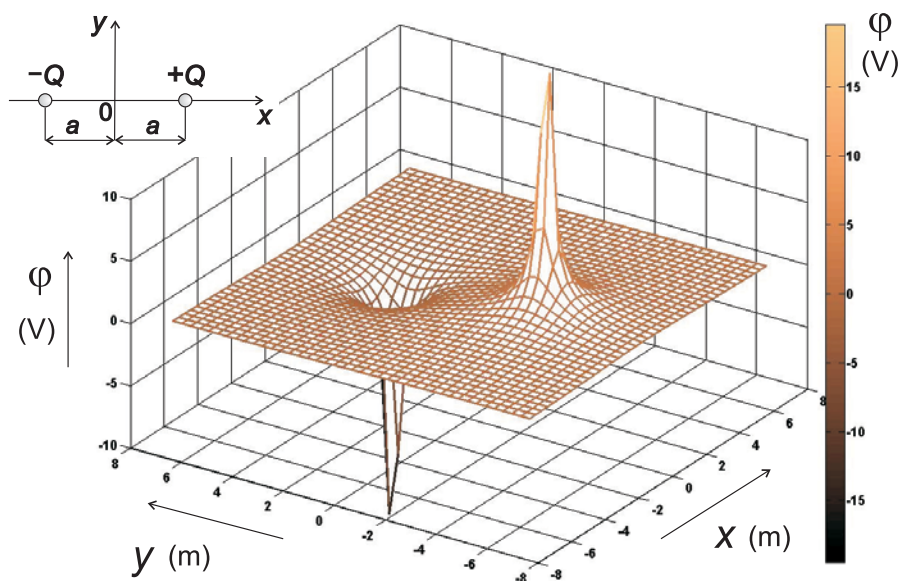
Obr. 0.4. Zobrazení teplotního pole v průřezu trojvodičového kabelu pomocí izoterm.

naše chápání srozumitelnější. Vizualizovat lze nejen elektromagnetické pole, ale i jiná fyzikální pole.

Uvedeme několik způsobů vizualizace různých fyzikálních polí. Použijeme při tom pojmy, s nimiž se čtenář seznámil při studiu fyziky. Jak první příklad uvedeme dvě možnosti zobrazení *rovinného skalárního pole* teplotního. Na obr. 0.4 je zobrazeno teplotní pole v průřezu trojvodičového kabelu pomocí izoterm. Vodiče kabelu mají teploty 20 °C, 60 °C a 100 °C, plášť kabelu má teplotu 0 °C. V grafu jsou v rovině (x,y) zakresleny křivky stejné teploty – *izotermy*. Jiný způsob zobrazení tohoto teplotního pole je na obr. 0.5. Izotermy

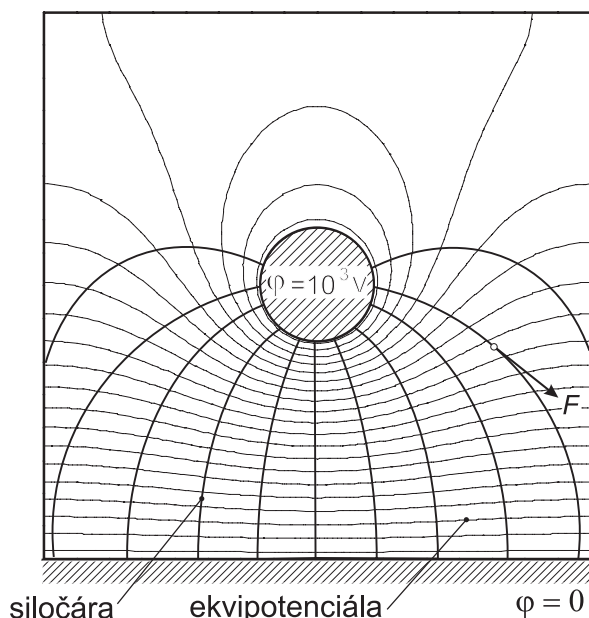


Obr. 0.5. Izotermy teplotního pole v průřezu trojvodičového kabelu, zobrazené barevnými suboblastmi.

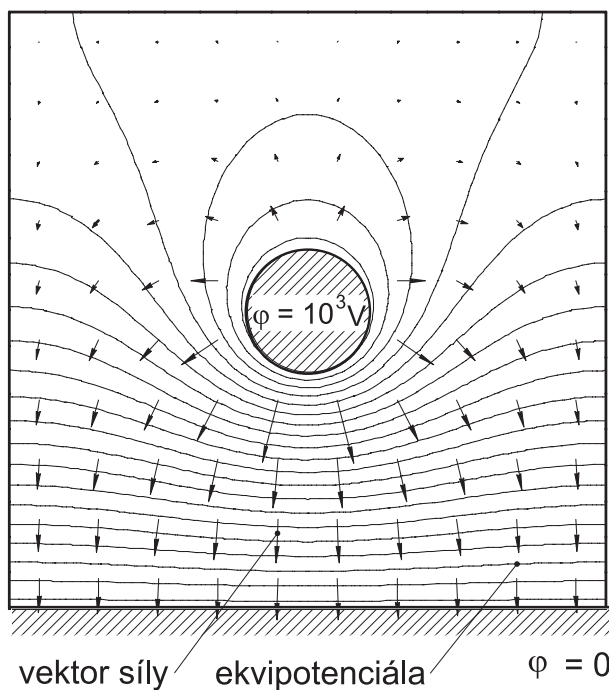


Obr. 0.6. Zobrazení elektrického potenciálu dvou bodových nábojů $+Q$, $-Q$ v rovině (x, y) .

jsou zde vyznačeny jako plošné barevné suboblasti, přičemž každé barvě odpovídají izotermie v jistém teplotním intervalu. S jiným příkladem rovinného skalárního pole se setkáváme na mapách při zobrazení reliéfu krajiny, kde místa stejné nadmořské výšky se vyznačují vrstevnicemi.



Obr. 0.7. Zobrazení silového (elektrického) pole pomocí siločar a ekvipotenciál u dlouhého vodiče nad zemí.

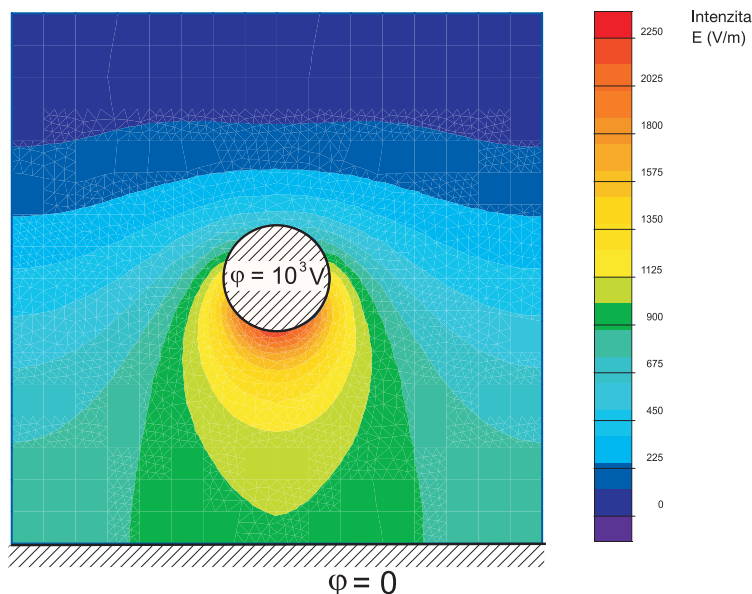


Obr. 0.8. Zobrazení silového (elektrického) pole pomocí vektorů sil a ekvipotenciál u dlouhého vodiče nad zemí.

Na obr. 0.6 je zakresleno rozložení elektrostatického pole dvojice bodových nábojů $+Q(a,0)$, $-Q(-a,0)$ v rovině (x,y) . Elektrostatické pole je charakterizováno skalárním elektrickým potenciálem φ . Jeho hodnotu v kterémkoliv bodu roviny (x,y) lze z tohoto obrázku odečíst buďto jako pořadnici příslušného bodu zborcené plochy (tato plocha je na obrázku vyšrafována), anebo lze potenciál určit ze zabarvení tohoto bodu na zborcené ploše, podle připojené stupnice. (Konstrukce zobrazení podle obr. 0.6 je popsána v příkladu P.3.6 v závěru 3. kapitoly.)

Příkladem *rovinného vektorového pole* je silové (elektrické) pole vodiče nad zemí; napětí mezi vodičem a zemí je 1000 V. V grafu na obr. 0.7 je soustava křivek – siločar, z nichž každá má tu vlastnost, že tečna v kterémkoliv jejím bodě udává *směr* síly F působící na vložený náboj. (O *velikosti* síly toto zobrazení nic nevypovídá.). V tomtéž obrázku jsou zakresleny křivky konstantního potenciálu (ekvipotenciály). Jiný způsob zobrazení tohoto pole je na obr. 0.8: silové pole je zde zobrazeno „oblakem“ šipek, z nichž každá udává svým směrem *směr* síly a délkou *velikost* síly. Na obr. 0.9 je další způsob zobrazení rozložení silového pole a sice pomocí barevných suboblastí. Každé barvě suboblasti přísluší síla, jejíž velikost lze odečíst z připojené stupnice. (O směru síly tento graf neinformuje.)

Poznamenejme, že vizualizace fyzikálních polí dává dobrou představu o globálním rozložení příslušného pole v prostoru, resp. v rovině. Má velký význam pro rychlou orientaci v řešeném problému, avšak přesnost, s níž jsou vyjadřovány výsledky, je nevalná.



Obr. 0.9. Zobrazení elektrického pole dlouhého vodiče nad zemí pomocí velikosti intenzity elektrického pole.

0.3. Elektromagnetické pole a technické projekty

Student, který stojí před úkolem proniknout do teorie elektromagnetického pole, si může klást otázku, zda je zvládnutí tohoto nelehkého vědního oboru nutné pro pochopení dalších předmětů zvoleného studijního programu a později pro úspěšné uplatnění v praxi. Může si klást otázku, proč se má učit řešit „nějaké elektromagnetické pole“, když jeho budoucí zaměstnavatel bude požadovat, aby vyřešil konkrétní elektrotechnický problém, který s elektromagnetickým polem (zdánlivě) nikterak nesouvisí. Například, aby rozhodl, zda navržený elektromotor nebude příliš hlučný, jakou má účinnost, nebo zda se v provozu příliš neoteplí. Student může ve svých pochybnostech vycházet z představy, že na všechny praktické úkoly jsou dnes k dispozici určité formule, výpočtové postupy, anebo více či méně dokonalý počítačový software, který s minimem řešitelovy námahy vygeneruje požadované výsledky. Takto kladené otázky však nejsou správné.

Pro elektrotechnického inženýra je teorie elektromagnetického pole základním nástrojem pro řešení technických projektů. Hloubka nutného poznání této teorie závisí na náročnosti řešení projektů. Můžeme rozlišovat tyto kategorie:

- Jestliže se jedná o řešení standardních úkolů, které už byly v obecné rovině rozřešeny a zpracovány do vzorců, postupů, počítačových programů apod., pak musí řešitel porozumět teorii elektromagnetického pole alespoň do té míry, aby si uvědomil meze platnosti zmíněných výpočtových pomůcek, aby byl schopen bezchybně formulovat vstupní data a správně interpretovat dosažené výsledky.

- Mnohé úkoly jsou však náročnější, vyžadují hlubší znalosti probíhajících elektromagnetických jevů, pro jejichž řešení doposud nejsou k dispozici spolehlivé výpočtové prostředky. Pak je třeba vycházet z obecných zákonů a metod teorie elektromagnetického pole a způsob výpočtu je třeba tvůrčím způsobem vytvářet.

Není oprávněná ani námitka, že projektanta nezajímá „nějaké elektromagnetické pole“, ale jiné, praktické údaje. Například vyšetříme-li elektrického pole v izolačním systému, pak jsme tím přímo našli elektrické namáhání izolace a můžeme rozhodnout, zda je ohrožena elektrická pevnost izolace. V mnohých jiných případech požadujeme určení jiných veličin, než jsou veličiny elektromagnetického pole. Jako příklad uveďme určení kapacity pro různou konfiguraci elektrod, nebo vlastní či vzájemnou indukčnost pro různé cívky, sílu elektromagnetů, točivý moment elektrického stroje, stanovení oteplení či mechanického namáhání různých elektrotechnických zařízení, určení vibrací, hluku a mnohé další. *Všechny tyto veličiny lze stanovit, jestliže vyřešíme příslušné elektromagnetické pole.* Přitom vyšetření elektromagnetického pole bývá tou obtížnější částí řešené úlohy.

Nežřídká se setkáváme s požadavkem vyšetřit složité fyzikální jevy, u nichž se uplatňuje nejen elektromagnetické pole, ale současně též další fyzikální pole (například tepelné pole, pole mechanického pnutí apod.), přičemž tato pole jsou spolu spojena. Hovoříme o *sdužený probléměch*. U některých sdužených problémů lze řešit jednotlivá fyzikální pole odděleně – jde o tzv. *slabě sdužené problémy*. Příkladem slabě sduženého problému je běžný návrh transformátoru. Tam se uplatňuje elektromagnetické pole a zároveň též pole teplotní. Vycházíme z toho, že teplotu vinutí známe – je omezena vlastnostmi izolace vinutí. Elektromagnetický výpočet a následný tepelný výpočet probíhají odděleně. Kdyby tepelný výpočet vedl k nižším teplotám než předpokládáme, byl by stroj nevyužit, v opačném případě by byl přetížen. V obou případech by bylo nutno elektromagnetický výpočet upravit. Jindy jsou poměry složitější: jednotlivá fyzikální pole jsou spolu vázána a nutno je řešit současně – jde o tzv. *silně sdužené problémy*. Řešení silně sdužených problémů bývá náročné a často se je daří zvládnout jen s nasazením výkonných hardwarových a softwarových prostředků. Příkladem je analýza procesu indukčního tavení, kdy hustota indukovaných proudů v roztavené vsázce závisí na rozložení teploty ve vsázce a ta dále závisí na rychlosti proudění roztavené vsázky. Současně se tedy uplatňují nejen jevy elektromagnetické, ale též jevy tepelné a jevy hydrodynamického proudění.

*Elektromagnetické pole je pro moderního fyzika tak reálné,
jako židle na níž sedí.*
Albert Einstein

1. Základní pojmy a zákony teorie elektromagnetického pole

Tato kapitola navazuje na znalosti, které čtenář získal studiem fyziky a úvodních elektrotechnických předmětů. Uvádí stručný přehled veličin, jejich jednotek a základních pojmů a zákonů teorie elektromagnetického pole, v rozsahu potřebném pro porozumění dalších kapitol.

1.1. Vznik a vývoj teorie elektromagnetického pole

Elektrické a magnetické jevy jsou soustavně zkoumány od konce 18. století. Na odhalování zákonitostí těchto jevů se podílela řada významných badatelů, jako např. Ch. A. Coulomb, A. Volta, H. Ch. Oersted, J. F. Biot, F. Savart, G. S. Ohm a G. R. Kirchhoff. Významné objevy učinil *André Maria Ampère*, který též systematicky zpracoval veškeré tehdejší představy o elektřině a magnetizmu a toto své dílo označil jako „elektrodynamiku“. Zdrojem nových poznatků o elektřině a magnetismu byly experimenty *Michaela Faradaye*, který v r. 1831 objevil zákon elektromagnetické indukce. Hlubavý duch Faradayův se nespokojil s odhalováním zákonitostí jevů, ale snažil se vysvětlit jejich fyzikální podstatu. Za jednu z největších ve fyzice se považuje jeho revoluční myšlenka, že nestačí zkoumat samotné elektrické náboje, magnety, proudovodiče apod., ale je nutno zkoumat i vlastnosti jisté hypotetické látky – nazývala se *éterem* (též *elektromagnetický*, *světelný* nebo *světový éter*) – která vyplňuje jejich okolní prostor. Na rozdíl od newtonské představy, že tyto objekty na sebe působí „do dálky“, se podle Faradayovy představy jejich vzájemné působení děje prostřednictvím tohoto „éteru“ a to konečnou rychlostí; hovoříme o působení „do blízka“. Označení éter bylo později nahrazeno výstižnějším názvem *elektromagnetické pole*.

Faraday dospěl ke svým poznatkům geniálními experimenty; nebyl matematicky vzdělán, nesnažil se používat matematiku a své objevy vyjadřoval výhradně verbálně. Úlohy formulovat Faradayovy myšlenky jazykem matematiky se ujal *James Clerk Maxwell*, který Faradayovy poznatky geniálním způsobem zobecnil a ve svém slavném dvoudílném spise *A Treatise on Electricity and Magnetism* z r. 1873 formuloval ucelený matematický model vyjadřující časově-prostorové zákony pro všechny do té doby zjištěné elektrické a magnetické jevy. Někteří Maxwellovy současníci uvítali Maxwellovo dílo, pro mnohé však bylo „nenázorné“ a nesrozumitelné. Jejich námitky, vyvolané netradičním pojetím

a uplatněním originálních (a tedy nezvyklých) myšlenek, ale též jeho formální komplikovaností, bránily rychlému přijetí a rozšíření Maxwellovy teorie.

Tak jako po Faradayovi musel přijít Maxwell, aby vyjádřil Faradayovy myšlenky matematicky, museli po Maxwellovi přijít další, kteří nahradili Maxwellem použitý matematický aparát (tzv. kvaternionový počet) způsobem jednodušším a vhodnějším pro technické aplikace. Kromě toho bylo nutné experimentálně ověřit některé Maxwellovy intuitivní předpoklady. Zasloužili se o to zejména *Oliver Heaviside* a *Heinrich Hertz*. Heaviside byl průkopníkem a pokračovatelem Maxwellových myšlenek. Byl jedním ze zakladatelů vektorové analýzy, kterou pak použil k formulaci Maxwellovy teorie. V Heavisideově formulaci nabyly základní zákony Maxwellovy teorie elektromagnetického pole elegantní a přehledný tvar. Dnes tvoří pevný základ teorie elektromagnetického pole a na Maxwellovu počest se nazývají *Maxwellovy rovnice*. Hertz, z podnětu svého učitele na berlínské univerzitě Hermanna Helmholtze, zkoumal, zda elektromagnetické vlny, jejichž matematické vyjádření vyplývá z Maxwellových rovnic, skutečně existují, anebo jsou jen matematickou fikcí. Po sedmiletém úsilí, v r. 1888, Hertz svými slavnými experimenty prokázal, že elektromagnetické vlny jsou objektivní realitou. Prokázal nejen jejich existenci, ale též prozkoumal jejich zákony šíření, odrazu, polarizace a lomu. Hertz tak devět let po Maxwellově smrti potvrdil a rozvinul jeho teorii. Třebaže se Hertz do konce svého života domníval, že elektromagnetické vlny nemají valný praktický význam, otevřel cestu k soudobým telekomunikačním technologiím, které zásadně ovlivňují lidskou civilizaci.

Maxwellova teorie elektromagnetického pole je *fenomenologická* a *makroskopická*, neboť je založena na pozorovatelných makroskopických jevech (fenoménech), zejména na Faradayových experimentech, a nezabývá se hypotézami, jimiž lze tyto jevy vysvětlit. Touto teorií nelze řešit otázky, při nichž se uplatňuje molekulová a fyzikální struktura. Pro elektromagnetická pole v mikroskopických (atomárních) měřítkách prohloubil Maxwellovu teorii v r. 1895 *Hendrik Antoon Lorentz* a dospěl k *mikroskopické (elektronové) teorii elektromagnetického pole*, již později vystřídala *kvantová elektrodynamika*. Klasická Maxwellova teorie má ještě další omezení: platí jen pro látková prostředí v klidu. Poměrně snadno ji lze zobecnit na systémy, které se pohybují, avšak nerelativistickými rychlostmi. Na základě speciální teorie relativity formulované v r. 1905 *Albertem Einsteinem* byla počátkem 20. století vybudována teorie elektromagnetického pole i pro soustavy, které se pohybují relativistickými rychlostmi – *relativistická elektrodynamika*.

V době Faradaye a Maxwella se nepodařilo uspokojivě vysvětlit fyzikální podstatu elektromagnetického pole, bylo však zřejmé, že elektrické a magnetické jevy neprobíhají v „prázdném prostoru“ a že toto pole reálně existuje. Teprve poznatky Heavisidea, Hertze a dalších (např. J. H. Poyntinga, P. N. Lebeděva aj.) a především pak speciální teorie relativity ukázaly, že elektromagnetickému poli je nutno přisuzovat určitou energii, hybnost a setrvačnost, tedy ty základní atributy, které náleží každé látce. Dospělo se tak k poznatku, že *elektromagnetické pole je jednou z forem hmoty*.

Cílem této knihy je poskytnout čtenáři nástroj pro řešení technických problémů a naučit ho s ním pracovat. Omezíme se na makroskopickou a nerelativistickou teorii, která je základní pracovní metodou v mnoha klíčových oborech soudobé elektrotechniky.

1.2. Základní pojmy a problémy teorie elektromagnetického pole

Náboje na elektrodách, proudy ve vodičích, permanentní magnety apod. jsou *zdroji* elektromagnetického pole, které indukují ve svém okolí. Toto elektromagnetické pole, které je rozloženo v prostoru, se může měnit s časem.

Základní úlohy v teorii elektromagnetického pole jsou:

- *Analýza pole*: je dáno časoprostorové rozmístění zdrojů pole (tj. nábojů, proudů apod.), určíme veličiny, které charakterizují časové a prostorové rozložení elektromagnetického pole. Problém analýzy má (z fyzikálního hlediska) jediné řešení.
- *Syntéza pole*: v jisté prostorové oblasti je dán (resp. předepsán) časoprostorový průběh elektromagnetického pole. Určíme prostorové rozmístění a časový průběh zdrojů pole. Syntéza zpravidla nemá jen jediné řešení. Požadované pole lze zpravidla realizovat více (často nekonečně mnoha) způsoby rozmístění zdrojů, anebo je realizovat nelze.

V dalším se budeme věnovat především metodám analýzy.

1.3. Význam teorie elektromagnetického pole pro provádění inženýrských projektů

Z hlediska elektrotechnické praxe nebývá vyšetření elektromagnetického pole konečným požadovaným výsledkem. Zpravidla nás zajímá:

- *interakce mezi polem a látkou* (např. elektrické namáhání izolace, elektromagnetická indukce ve vodičích), nebo
- *interakce mezi polem a jeho zdroji* (např. silové působení na tělesa s náboji, nebo na proudovodiče), popřípadě
- *vyšetření hodnot parametrů prvků elektrických obvodů* (tj. určení kapacit kondenzátorů, odporu vodičů a indukčnosti cívek).

Vyšetření elektromagnetického pole je tou nejdůležitější a zpravidla též nejobtížnější etapou výpočtů.

1.4. Veličiny elektromagnetického pole a jejich jednotky

Uvedeme stručný přehled veličin používaných v teorii elektromagnetického pole a jejich jednotek (v soustavě SI), a budeme předpokládat, že čtenář se s touto problematikou seznámil v předchozím studiu.

- **Elektrický náboj** Q je skalární veličinou. Jednotkou je coulomb [C]. Experimentálně bylo zjištěno, že náboj jako fyzikální veličina má výjimečné vlastnosti:
 - platí *princip zachování náboje* (tj. náboj je nevytvořitelný a nezničitelný),

- množství kladných nábojů je rovno množství záporných nábojů (tj. příroda jako celek je elektricky neutrální) a
- náboj má kvantový charakter (tj. je roven celistvému násobku elementárního náboje $e = 1,62 \cdot 10^{-19} \text{ C}$).

Náboj Q může být rozložen

- prostorově v objemu V , s *objemovou hustotou*

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad [\text{C/m}^3] \quad (1.1)$$

- plošně na ploše S , s *plošnou hustotou*

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \quad [\text{C/m}^2] \quad (1.2)$$

- lineárně na křivce l , s *lineární hustotou*

$$\tau = \frac{dQ}{dl} \quad [\text{C/m}] \quad (1.3)$$

- nebo může být náboj *diskrétní* (tj. je soustředěn do bodu).

Rozlišujeme *volné náboje* – mohou se přemísťovat v makroskopických vzdálenostech, a *vázané náboje* – mohou se přemísťovat jen v mikroskopických vzdálenostech. Volnými náboji jsou volné elektrony v kovech nebo ionty v elektrolytech (jsou odpoutány od atomů, resp. molekul a volně se mezi nimi pohybují). Vázané náboje vznikají polarizací dielektrika.

- **Elektrický proud** I (resp. i) je skalární veličinou. Je tvořen uspořádaným pohybem elektrických nábojů. Projde-li průřezem vodiče S za čas t náboj Q , prochází jím elektrický proud

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad [\text{A}] \quad (1.4)$$

Speciálně: pohybuje-li se náboj Q vodičem rovnoměrně, nazýváme proud *stejnoseměrným* $I(t) = \text{konst.}$, a platí

$$I = \frac{Q}{t} \quad [\text{A}] \quad (1.5)$$

Příklad 1.1.

Vodičem prochází proud $I(t) = 10 \sin \omega t$, $f = 1000 \text{ Hz}$. Určete náboj, který projde průřezem vodiče v časovém intervalu $<0, T/4>$.

Řešení:

$$Q = \int_0^{T/4} 10 \sin \omega t \, dt = \frac{10}{\omega} [-\cos \omega t]_0^{T/4} = \frac{10}{2\pi \cdot 10^3} = 1,59 \text{ mC}$$

Elektromagnetické pole má dvě složky: *elektrické pole* a *magnetické pole*. Tato pole jsou charakterizována vektorovými veličinami $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$, definovanými takto:

- **Intenzita elektrického pole $\mathbf{E}$** je vektorovou veličinou definovanou jako síla působící na jednotkový bodový náboj Q :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_e}{Q} \quad (1.6)$$

kde $\mathbf{F}_e$ je síla, kterou působí elektrické pole na částici s nábojem Q ; částice může být v klidu nebo v pohybu. Jednotkou intenzity elektrického pole je volt na metr [V/m].

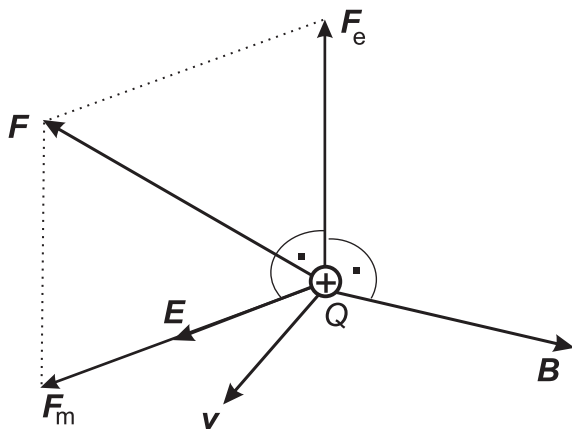
- **Magnetická indukce $\mathbf{B}$** je vektorovou veličinou implicitně definovanou výrazem $\mathbf{F}_m = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (1.7)

kde $\mathbf{F}_m$ je síla, kterou působí magnetické pole na částici s nábojem Q pohybující se rychlostí $\mathbf{v}$. Jednotkou magnetické indukce je tesla [T].

- **Lorentzova síla** je síla, kterou působí elektromagnetické pole na částici s nábojem Q , pohybující se rychlostí $\mathbf{v}$ (obr. 1.1):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.8)$$

Jednotkou síly je newton [N].



Obr. 1.1. K Lorentzově síle.

Intenzita elektrického pole $\mathbf{E}$ a magnetická indukce $\mathbf{B}$ jsou základními veličinami, které charakterizují elektromagnetické pole. Je-li pole ve vakuu, jsou tyto veličiny postačující.

V látkovém prostředí zavádíme ještě další dvě vektorové veličiny: pro elektrické pole elektrickou indukci $\mathbf{D}$ a pro magnetické pole intenzitu magnetického pole $\mathbf{H}$.

- **Elektrická indukce $\mathbf{D}$** je s vektorem intenzity elektrického pole $\mathbf{E}$ vázána vztahem¹⁾

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad [\text{C/m}^2] \quad (1.9)$$

kde veličina ε charakterizuje elektrické vlastnosti prostředí a nazývá se *permitivita*.

1) Ve starší literatuře se pro vektor $\mathbf{D}$ používá název *elektrické posunutí*, který zavedl Maxwell.

- **Intenzita magnetického pole H** je s vektorem magnetické indukce B vázána vztahem

$$H = \frac{1}{\mu} B \quad [\text{A/m}] \quad (1.10)$$

kde veličina μ charakterizuje magnetické vlastnosti prostředí a nazývá se *permeabilita*. Její převrácená hodnota, $1/\mu = \nu$, se nazývá *reluktivita*.

- **Proudová hustota (hustota vodivého proudu) J** vyjadřuje náboj, který projde za 1 s jednotkovou plochou průřezu vodiče. Je definována vztahem

$$J = \rho^+ v \quad [\text{A/m}^2] \quad (1.11)$$

kde ρ^+ je objemová hustota kladných nosičů proudu a v je rychlost jejich pohybu v daném bodě. S intenzitou elektrického pole E je vázána *Ohmovým zákonem v diferenciálním tvaru*

$$J = \gamma E \quad [\text{A/m}^2] \quad (1.12)$$

kde veličina γ charakterizuje elektrickou vodivost prostředí a nazývá se *konduktivita*. Její převrácená hodnota, $1/\gamma = \rho$, charakterizuje elektrický odpor prostředí a nazývá se *rezistivita*.

Pro zobrazení (vizualizaci) elektromagnetického pole používáme *vektorové čáry* uvedené v tab. 1.1.

Tabulka 1.1. Vektorové čáry zobrazující elektromagnetické pole.

Čára vektoru:	Název:
E	elektrické silové čáry (siločáry)
B	magnetické indukční čáry
D	elektrické indukční čáry
H	magnetické silové čáry (siločáry)
J	(elektrické) proudnice

Z fyzikálního hlediska by bylo logické zaměnit názvy veličin B a H : B nazývat intenzitou magnetického pole a H magnetickou indukcí. Výše uvedené terminologie vznikla v počátcích vývoje teorie elektromagnetického pole, je všeobecně používána a proto se jí v dalším přidržíme.

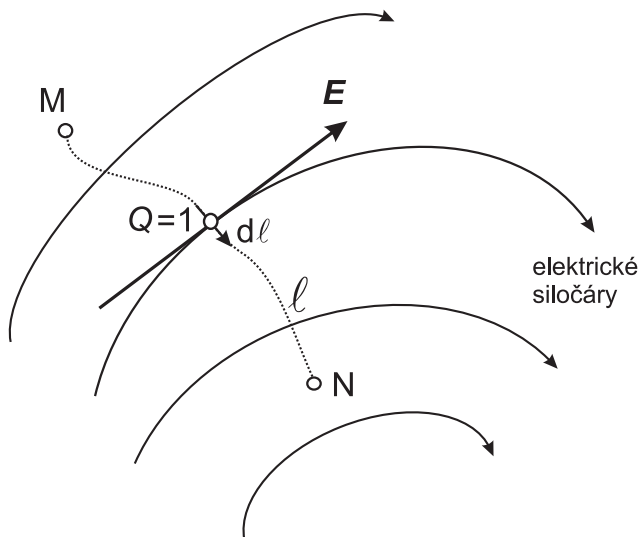
- **Stavové vektory.** Tak souhrnně nazýváme veličiny E, B, D, H, J , které jsou *lokálními charakteristikami* elektromagnetického pole.
- **Regulární body.** Body prostoru, v nichž jsou stavové vektory E, B, D, H, J spojitě a spojitě diferencovatelné funkce polohy nazýváme *regulárními* (též *normálními*) *body* elektrického a magnetického pole. Regulárními nejsou například body rozhraní dvou různých prostředí. V elektrickém poli nejsou regulárními body, v nichž jsou umístěny

diskrétní bodové náboje, v magnetickém poli nejsou regulárními body na proudových vláknech zanedbatelné tloušťky.

Integrační charakteristiky elektromagnetického pole jsou:

- **Elektrické napětí.** Mezi body M a N je elektrické napětí vyjádřeno křivkovým integrálem podél orientované křivky l (obr. 1.2). Je definované vztahem

$$U_{MN} = \int_M^N \mathbf{E} d\mathbf{l} \quad [\text{V}] \quad (1.13)$$



Obr. 1.2. K definici elektrického napětí.

Jednotkou je volt [V]. Elektrické napětí lze fyzikálně interpretovat jako práci vykonanou silami elektromagnetického pole při přemísťování kladného jednotkového bodového náboje z bodu M do bodu N. Vyplyvá to z následující úvahy. Přemístíme-li elektrický náboj Q , pohybující se v elektromagnetickém poli rychlostí $\mathbf{v}$ z bodu M do bodu N, vykoná Lorentzova síla práci

$$A = \int_M^N \mathbf{F} d\mathbf{l} = Q \int_M^N \mathbf{E} d\mathbf{l} + Q \int_M^N (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{l} \quad (1.14)$$

Protože vektor $d\mathbf{l}$ je kolineární s vektorem $\mathbf{v}$, je vektor $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ kolmý k vektoru $d\mathbf{l}$ a tedy druhý sčítanec je nulový. Pro $Q = 1$ dostáváme rov. (1.13).

- **Magnetické napětí** mezi body M a N podél křivky l je definováno obdobně:

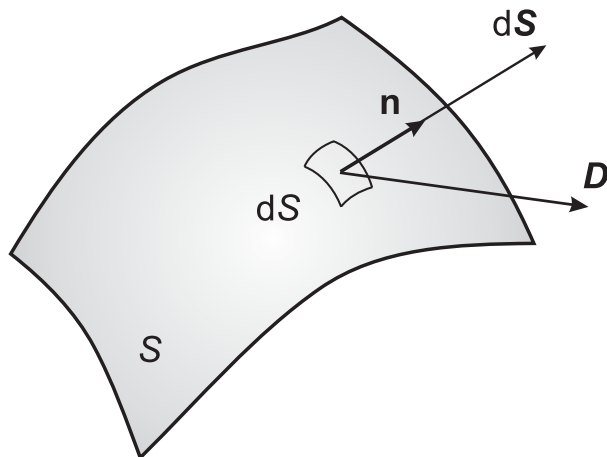
$$U_{mMN} = \int_M^N \mathbf{H} d\mathbf{l} \quad [\text{A}] \quad (1.15)$$

Jednotkou magnetického napětí je ampér [A].

- **Elektrický indukční tok** je tok vektoru $\mathbf{D}$ orientovanou plochou S (obr. 1.3):

$$\psi = \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} \quad [\text{C}] \quad (1.16)$$

Jednotkou je coulomb [C].



Obr. 1.3. K pojmu „tok vektoru $\mathbf{D}$ plochou S “.

- **Magnetický indukční tok** je tok vektoru $\mathbf{B}$ orientovanou plochou S :

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} \quad [\text{Wb}] \quad (1.17)$$

Jednotkou je weber [Wb].

- **Elektrický proud** je tok vektoru $\mathbf{J}$ orientovanou plochou S :

$$I = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} \quad [\text{A}] \quad (1.18)$$

Jednotkou je ampér [A].

Vztahy mezi stavovými veličinami $\mathbf{E}$ a $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ a $\mathbf{B}$, $\mathbf{J}$ a $\mathbf{E}$ v látkovém prostředí, vyjádřenými rovnicemi (1.9), (1.10) a (1.12), obsahují veličiny ϵ , μ , γ , které charakterizují elektrické a magnetické vlastnosti tohoto prostředí (materiálu); nazývají se proto *materiálové vztahy* a veličiny ϵ , μ , γ nazýváme *materiálovými charakteristikami*.

1.5. Materiálové charakteristiky

Rozlišujeme tyto obecné fyzikální materiálové vlastnosti prostředí, v němž je rozloženo elektromagnetické pole.